Metodo vettoriale nella risoluzione di problemi di geometria elementare

Ercole Suppa*

25 aprile 2010

Sommario

In questo articolo viene illustrato l'impiego dei vettori nella risoluzione di problemi di geometria elementare.

1 Notazioni.

Un *vettore geometrico* $\overrightarrow{PQ}$ è un oggetto avente un *modulo* (lunghezza del segmento PQ) una *direzione* (quella individuata dalla retta PQ) ed un *verso* (da P a Q). Il punto P è detto *primo estremo* (o coda) del vettore $\overrightarrow{PQ}$, il punto Q è detto *secondo estremo* (o punta). Due vettori si condiderano *uguali* (equipollenti) se hanno lo stesso modulo, la stessa direzione e lo stesso verso. Fissato un qualsiasi punto O come origine il vettore $\overrightarrow{OP}$ è chiamato *vettore posizione*. La lunghezza del vettore $\overrightarrow{PQ}$ viene indicata con $\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|$.

Spesso, per comodità nei calcoli, il vettore posizione $\overrightarrow{OP}$ viene indicato semplicemente con $\overrightarrow{P}$. Con questa notazione, presi due punti P, Q risulta $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{Q} - \overrightarrow{P}$.

*ercsuppa@tin.it

2 Problemi risolti.

Presentiamo, ora, alcuni esempi che evidenziano come i vettori possano essere usati per risolvere alcuni tipi di problemi geometrici.

Problema 1. (IMO 2008, problema 1) *Sia $\triangle ABC$ un triangolo acutangolo con ortocentro H. La circonferenza con centro il punto medio di BC e passante per H interseca la retta BC in A_1 e A_2. Analogamente, la circonferenza con centro il punto medio di CA e passante per H interseca la retta CA in B_1 e B_2, e la circonferenza con centro il punto medio di AB e passante per H interseca la retta AB in C_1 e C_2. Dimostrare che A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 giacciono su una medesima circonferenza.*

Soluzione.

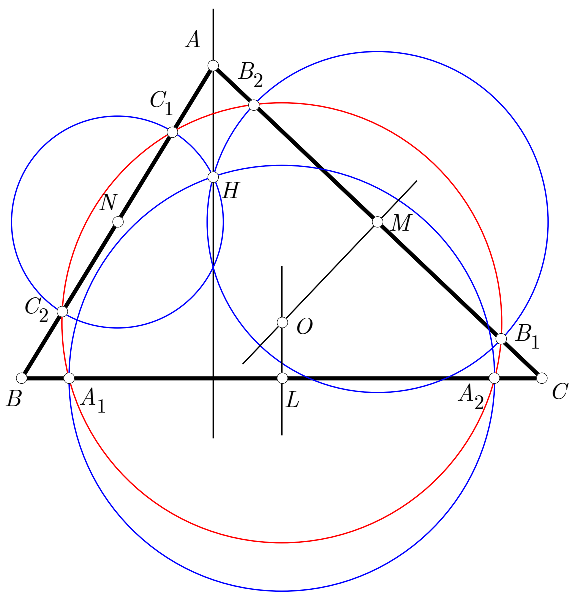


FIGURA 1

Indichiamo con L, M, N i punti medi di BC, CA, AB (FIGURA 4). Se i sei punti A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 stanno su un cerchio, il centro di detto cerchio deve essere il circoncerchio O di $\triangle ABC$. Per dimostrare la conciclicità dei 6 punti basta verificare che hanno tutti la stessa distanza do O. Ovviamente $OA_1 = OA_2$, $OB_1 = OB_2$, $OC_1 = OC_2$, dunque per concludere è sufficiente provare che $OA_1 = OB_1$, in quanto l'altra uguaglianza $OA_1 = OC_1$ si dimostra in modo analogo. Scegliendo O come origine dei vettori abbiamo

$$\vec{H} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} \qquad , \qquad \vec{L} = \frac{\vec{B} + \vec{C}}{2}$$

Applicando il teoerma di Pitagora al triangolo rettangolo $\triangle OLA_1$ otteniamo:

$$\begin{aligned}
OA_1^2 &= OL^2 + LA_1^2 = OL^2 + LH^2 = \\
&= \left\| \frac{\overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}}{2} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C} - \frac{\overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}}{2} \right\|^2 = \\
&= \left\| \frac{\overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{2\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}}{2} \right\|^2 = \\
&= \frac{4\left\|\overrightarrow{A}\right\|^2 + 2\left\|\overrightarrow{B}\right\|^2 + 2\left\|\overrightarrow{C}\right\|^2 + 4\left(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B} + \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{C} + \overrightarrow{C}\cdot\overrightarrow{A}\right)}{4} = \\
&= \frac{8R^2 + 4\left(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B} + \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{C} + \overrightarrow{C}\cdot\overrightarrow{A}\right)}{4}
\end{aligned}$$

In modo analogo si trova che

$$OB_1^2 = \frac{8R^2 + 4\left(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B} + \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{C} + \overrightarrow{C}\cdot\overrightarrow{A}\right)}{4}$$

e la dimostrazione è completa $\square$

Problema 2. *Dato un quadrilatero $ABCD$ ed un punto M del suo piano dimostrare che i simmetrici di M rispetto ai punti medi dei lati sono vertici di un parallelogramma.*

Soluzione.

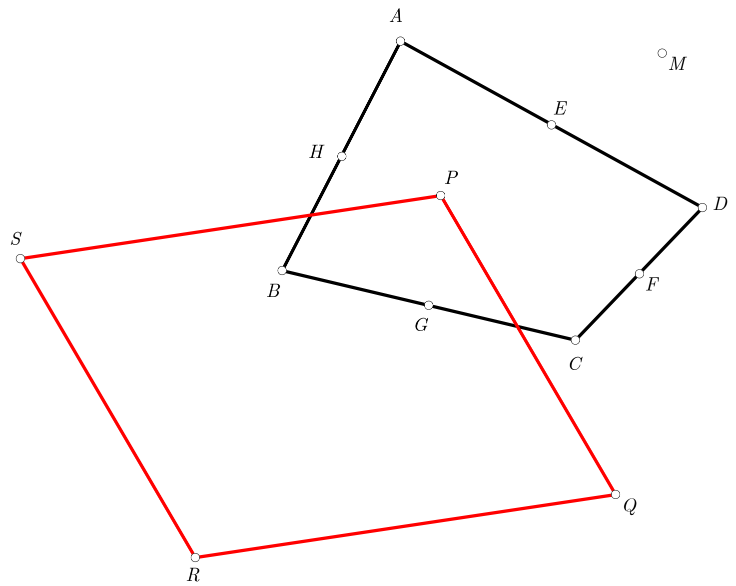


FIGURA 2

Siano E, F, G, H i punti medi di AB, BC, CD, DA rispettivamente e siano P, Q, R, S i simmetrici di M rispetto a E, F, G, H (FIGURA 6). Abbiamo:

$$\overrightarrow{P} = \overrightarrow{M} + 2 \cdot \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{M} + 2\left(\frac{\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}}{2} - \overrightarrow{M}\right) = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} - \overrightarrow{M}$$

ed in modo analogo si trova che

$$\overrightarrow{Q} = \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C} - \overrightarrow{M}$$

$$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{C} + \overrightarrow{D} - \overrightarrow{M}$$
$$\overrightarrow{S} = \overrightarrow{D} + \overrightarrow{A} - \overrightarrow{M}$$

Pertanto

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{Q} - \overrightarrow{P} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{A}$$
$$\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{Q} - \overrightarrow{P} = \overrightarrow{A} - \overrightarrow{C}$$

Essendo $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{RS}$, il quadrilatero $PQRS$ è un parallelogrammo, avendo i lati opposti PQ ed RS uguali e paralleli. $\square$

Problema 3. *Sia $ABCDE$ un pentagono convesso e siano M, N, P, Q i punti medi dei lati AB, BC, CD, DE rispettivamente. Se K ed L sono i punti medi di M e PQ determinare la lunghezza di KL sapendo che $AE = k$.*

Soluzione.

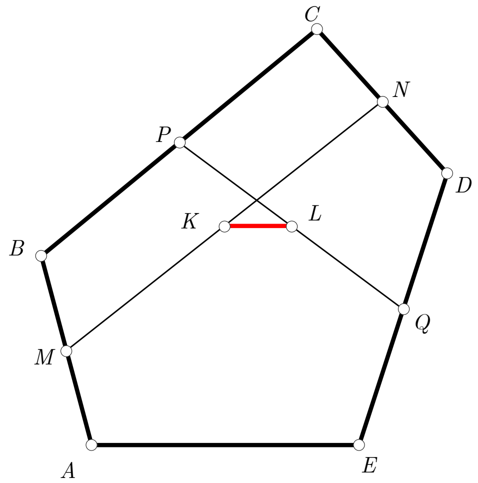


FIGURA 3

Fissato un sistema di coordinate con origine nel punto A, abbiamo

$$\overrightarrow{M} = \frac{\overrightarrow{B}}{2}, \qquad \overrightarrow{P} = \frac{\overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}}{2}, \qquad \overrightarrow{N} = \frac{\overrightarrow{C} + \overrightarrow{D}}{2}, \qquad \overrightarrow{Q} = \frac{\overrightarrow{E} + \overrightarrow{D}}{2}$$

Pertanto

$$\overrightarrow{K} = \frac{\overrightarrow{M} + \overrightarrow{N}}{2} = \frac{\overrightarrow{B} + \overrightarrow{C} + \overrightarrow{D}}{4} \qquad , \qquad \overrightarrow{L} = \frac{\overrightarrow{P} + \overrightarrow{Q}}{2} = \frac{\overrightarrow{B} + \overrightarrow{C} + \overrightarrow{D} + \overrightarrow{E}}{4}$$

e, di conseguenza,

$$KL = \left\| \overrightarrow{KL} \right\| = \left\| \overrightarrow{L} - \overrightarrow{K} \right\| = \left\| \frac{\overrightarrow{E}}{4} \right\| = \frac{k}{4}$$

□

Problema 4. *Siano E, F, G, H i punti medi dei lati del quadrilatero $ABCD$, sia $P = FH \cap EG$, sia T il punto medio di AC e sia S il punto medio di BD. Dimostrare che P è il punto medio di TS.*

Soluzione.

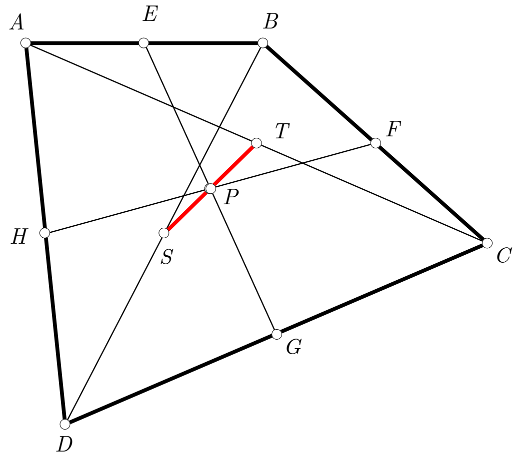


Figura 4

Dato che:

$$\overrightarrow{E} = \frac{\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}}{2}, \quad \overrightarrow{G} = \frac{\overrightarrow{C} + \overrightarrow{D}}{2}, \quad \overrightarrow{S} = \frac{\overrightarrow{B} + \overrightarrow{D}}{2}, \quad \overrightarrow{T} = \frac{\overrightarrow{A} + \overrightarrow{C}}{2}$$

il punto medio di ST è

$$\frac{\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C} + \overrightarrow{D}}{4}$$

che coincide con il punto medio di EG, dunque sta su EG. In modo analogo si prova che il punto medio di ST sta su HF. Pertanto il punto mdio di ST è proprio $EG \cap HF = P$. $\square$

Problema 5. *Siano $ABFG$, $ACDE$ i quadrati costruiti esternamente ai lati AB, AC del triangolo $\triangle ABC$. Dimostrare che $EB \perp CG$*

Soluzione.

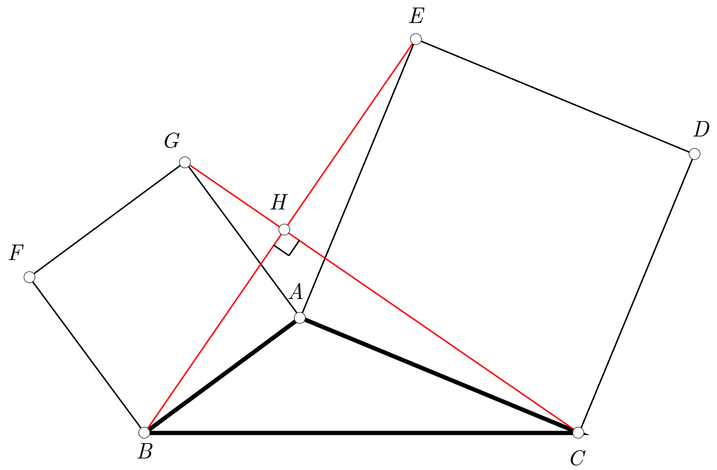


Figura 5

Detto $H = BE \cap CG$ abbiamo

$$EB \perp CG \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\angle GHE) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{CG} = 0$$

D'altra parte, essendo

$$\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \qquad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{GA} = 0$$

$$\cos(\angle BAC) = \cos(\pi - \angle GAE) = -\cos(\angle GAE)$$

risulta che

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{GC} &= \left(\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{AC}\right) = \\
&= \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \\
&= \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \\
&= EA \cdot GA \cdot \cos(\angle EAG) + AB \cdot AC \cdot \cos(\angle BAC) = \\
&= \cos(\angle BAC)(AC \cdot AB - AB \cdot AC) = 0
\end{aligned}$$

e questo prova che $EB \perp CG$. $\square$

Problema 6. (Mathematical Reflection S144) *Let $ABCD$ be a quadrilateral. We consider the reflection of the lines AB, BC, CD, DA on the respective midpoints of the opposite sides CD, DA, AB, BC. Prove that these four lines bound a quadrilateral $A'B'C'D'$ homothetic with $ABCD$ and find the ratio and center of the homothety.*

Proposed by Francisco Javier García Capitán and Juan Bosco Romero Márquez

Soluzione.

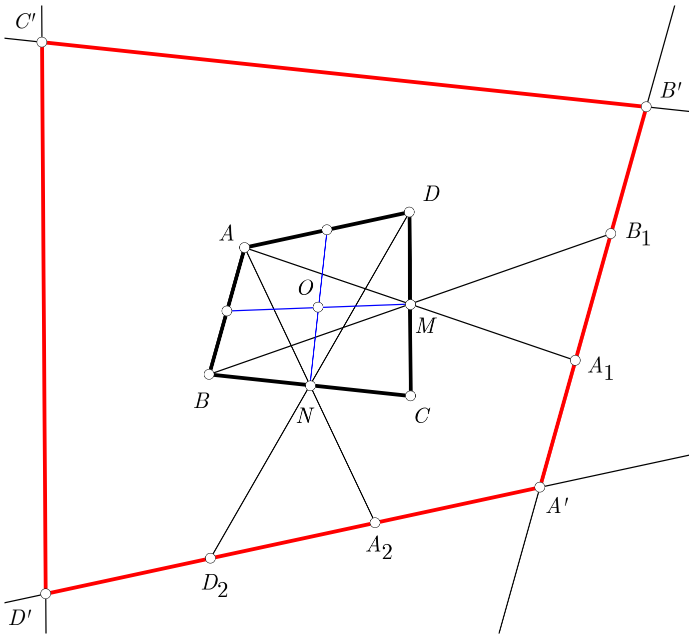


Figura 6

Consideriamo un sistema di coordinate con origine nel baricentro O di $ABCD$. Siano A_1, B_1 le riflessioni di A, B rispetto al punto medio M di CD e siano A_2, D_2 le riflessioni di A, D rispetto al punto medio N di BC, come mostrato in figura.

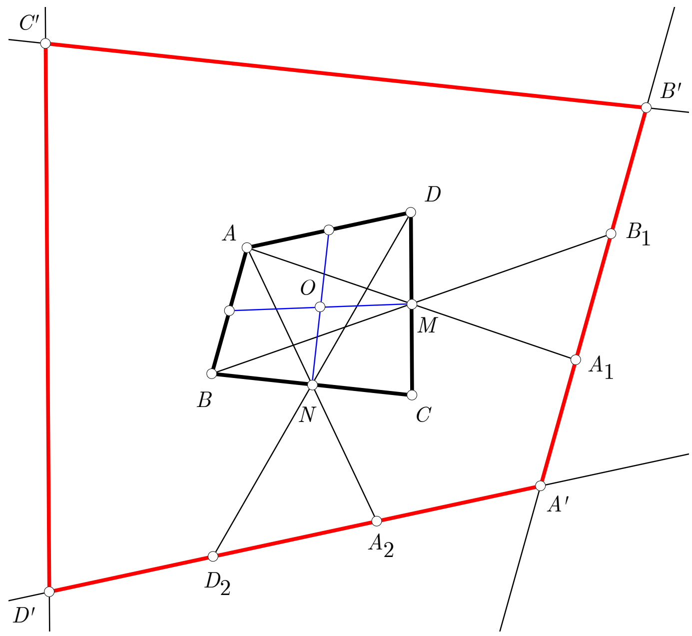
Chiaramente risulta $\overrightarrow{M} = \frac{\overrightarrow{C}+\overrightarrow{D}}{2}$, $\overrightarrow{N} = \frac{\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C}}{2}$, quindi

$$\overrightarrow{A_1} = \overrightarrow{C} + \overrightarrow{D} - \overrightarrow{A}, \qquad \overrightarrow{B_1} = \overrightarrow{C} + \overrightarrow{D} - \overrightarrow{B} \tag{1}$$

$$\overrightarrow{A_2} = \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C} - \overrightarrow{A}, \qquad \overrightarrow{D_2} = \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C} - \overrightarrow{D} \tag{2}$$

Poichè A' giace sulle rette A_1B_1 e A_2D_2 esistono opportuni numeri reali t, u tali che

$$\overrightarrow{A'} = \overrightarrow{A_1} + t\left(\overrightarrow{B_1} - \overrightarrow{A_1}\right) = \overrightarrow{A_2} + u\left(\overrightarrow{D_2} - \overrightarrow{A_2}\right)$$



e, usando (1) e (2), otteniamo

$$\overrightarrow{C} + \overrightarrow{D} - \overrightarrow{A} + t\left(\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}\right) = \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C} - \overrightarrow{A} + u\left(\overrightarrow{A} - \overrightarrow{D}\right) \qquad \Rightarrow$$

$$(t-u)\overrightarrow{A} - (t+1)\overrightarrow{B} + (u+1)\overrightarrow{D} = 0$$

Poichè i vettori $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ e $\overrightarrow{D}$ sono linearmente indipendenti otteniamo

$$t = u = -1 \qquad \Rightarrow \qquad \overrightarrow{A'} = \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C} + \overrightarrow{D} - 2\overrightarrow{A} \tag{3}$$

Dalla (3), tenendo conto che $\overrightarrow{O} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C} + \overrightarrow{D}\right)$, segue

$$\overrightarrow{A'} + 3 \cdot \overrightarrow{A} = 4 \cdot \overrightarrow{O} \qquad \Leftrightarrow \qquad \overrightarrow{OA'} = -3 \cdot \overrightarrow{OA}$$

e questo implica che A' è l'immagine di A tramite l'omotetia di centro O e rapporto $k = -3$. In maniera analoga si dimostra che B', C', D' sono rispettivemente le immagini di B, C, D nell'omotetia di centro O e rapporto $k = -3$.

Pertanto il quadrilatero $A'B'C'D'$ è l'immagine di $ABCD$ sotto l'omotetia di centro O e rapporto $k = -3$. . $\square$

3 Problemi proposti.

Esercizio 1. *Dimostrare che se in un quadrilatero convesso $ABCD$ vale l'uguaglianza*

$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2$$

allora le sue diagonali AC e BD sono perpendicolari.

Esercizio 2. *Sui lati AC e BC di un triangolo ABC, costruiamo dei quadrati. Indichiamo con K, L i centri di questi quadrati, e con D il punto medio di AB. Dimostrare che il triangolo KDL è rettangolo ed isoscele.*

Esercizio 3. *Siano A_1, A_2, A_3, A_4 quattro punti distinti di una circonferenza. Sia W_i il cerchio dei 9 punti di $\triangle A_jA_kA_\ell$, dove $\{i, j, k, \ell\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Dimostrare che questi cerchi hanno un punto in comune.*

Esercizio 4. *Sian A, B, C, D quattro punti distinti di un cerchio di centro O, tali che AC e BD sono perpendicolari, e sia $T = AC \cap BD$. Dimostrare che $2 \cdot \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$.*

Riferimenti bibliografici

[1] Kin-Yin Li, Vector geometry, Mathematical excalibur, vol 6-n.5-2002

[2] Mathematical Reflection 6(2009), 18-19.